Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Problèmes d'examen - Les nombres complexes

Exercice 1 (Partiel 2009)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré suivante :

$$z^2 - iz - (1+i) = 0.$$

Exercice 2 (Partiel 2009)**.** Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$.
Écrire z sous la forme polaire $z = re^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.
En déduire le module et l'argument appartenant à $[0, 2\pi[$ de z^7.

Exercice 3 (Partiel 2010)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique

$$\tfrac{1}{2}z^2 + 2\sqrt{2}z + 3 + i = 0$$

Exercice 4 (Partiel 2011)**.** Soit un entier $n \geq 1$.
On considère un nombre complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note A l'ensemble des racines n-ièmes complexes de Z.

1. Donner la liste des éléments de A.
2. Donner des nombres complexes z_0 et u tels que $A = \{z_0u^0, z_0u^1, z_0u^2, \ldots\}$.
3. Soit un entier $p \geq 1$, calculer la somme $S = \sum_{z \in A} z^p$.

Exercice 5 (Examen 2011)**.** Déterminer sous forme polaire, puis sous forme algébrique tous les nombres complexes z tels que

$$z^3 = 8i.$$

Exercice 6 (Rattrappage 2011)**.** Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^5 = 16 - 16i\sqrt{3}.$$

Exercice 7 (Partiel 2012)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique

$$3z^2 + (1-4i)z - 1 - i = 0$$

Exercice 8 (Partiel 2012)**.**

1. A l'aide des nombres complexes, établir les formules de l'angle double (où $\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1, \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

2. A l'aide de l'exponentielle complexe, exprimer $\sin^5\theta$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) comme une somme de termes en $\sin(p\theta)$ avec p entier, c.a.d. linéariser $\sin^5\theta$.
3. Question ajoutée : faire la même chose avec le cosinus.

Exercice 9 (Examen 2012)**.** Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^7 = 64\sqrt{3} + 64i.$$

Exercice 10 (Examen 2012)**.** On considère les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$E:\ z^5 + 1 = 0 \qquad\qquad E':\ z^4 + \overline{z} = 0.$$

1. Écrire -1 sous forme polaire.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les solutions de (E) sont solutions de (E').
4. Soit z une solution non nulle de (E'), montrer que $|z| = 1$ puis que z est solution de (E).
5. Résoudre (E') dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 (Rattrappage 2012)**.** Dans cet exercice θ désigne un nombre réel.

1. Trouver les solutions Z complexes de l'équation : $Z^2 - 2\cos(\theta)Z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions complexes des deux équations suivantes :

$$z^3 = e^{i\theta}, \qquad \text{et} \qquad z^3 = e^{-i\theta}.$$

Exercice 12 (Rattrappage 2012)**.** Dans cet exercice α désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha) \neq 0$.

1. Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z \neq 0$.
2. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-i$.
3. Écrire sous forme exponentielle $z_0 = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$.
   Indication : commencer par écrire les formes exponentielles du numérateur et du dénominateur.
4. Déterminer tous les nombres réels α vérifiant l'équation :

$$\left(\frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}\right)^2 = -i.$$